# Smoothness Prior

平滑化の問題

$$y_n = f_n + \varepsilon_n, \quad n = 1, \ldots, N$$

$y_n$ 観測値
$f_n$ 未知パラメータ
$\varepsilon_n$ ノイズ（残差）

罰金付最小二乗法

Infidelity to the data

Infidelity to smoothness

$$\min_f \left[ \sum_{n=1}^{N} (y_n - f_n)^2 + \lambda^2 \sum_{n=1}^{N} (\nabla^k f_n)^2 \right]$$

・ベイズモデリング
・制約充足パラダイム



# 季節調整モデル

$$y_n = t_n + s_n + p_n + td_n + r_n + w_n$$

$t_n$ トレンド　$p_n$ 定常変動　$r_n$ 外生変数
$s_n$ 季節成分　$td_n$ 曜日効果　$w_n$ ノイズ

成分モデル

$$s_n = s_{n-p} + v_{2n}$$

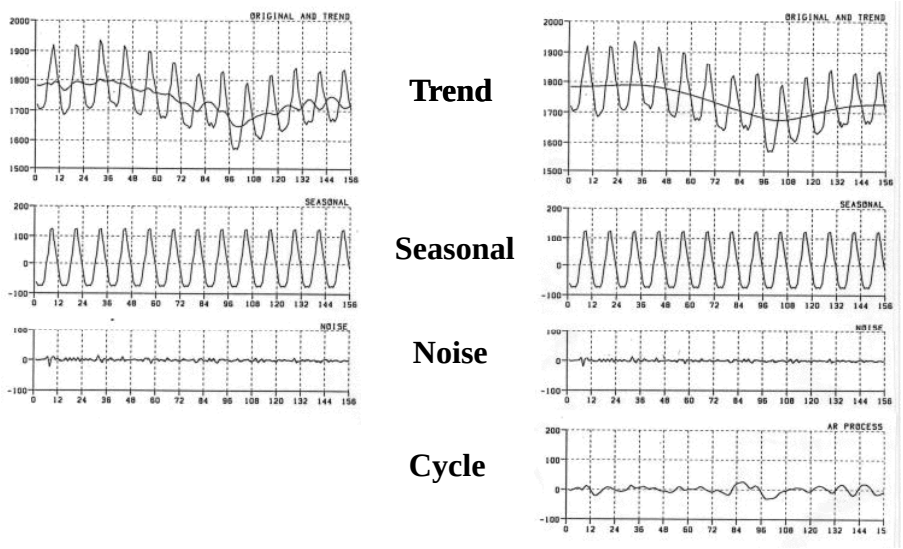
$$\Delta^k t_n = v_{1n}$$
$$s_n = -(s_{n-1} + \cdots + s_{n-p+1}) + v_{2n}$$
$$p_n = a_1 p_{n-1} + \cdots + a_m p_{n-m} + v_{3n}$$
$$td_n = \beta_1 d_{n1} + \cdots + \beta_{7n}$$

状態空間表現

$$x_n = Fx_{n-1} + Gv_n$$
$$y_n = Hx_n + w_n$$

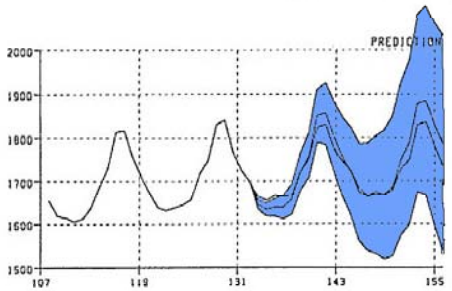


# 標準的方法　定常成分を加えた方法

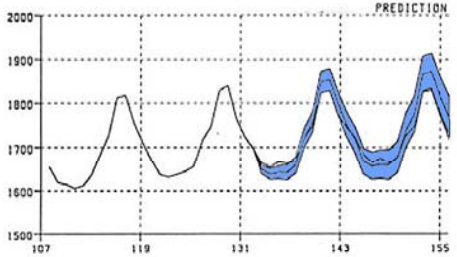





# 長期予測の可能性




標準的方法




Cycleを考慮した方法

長期予測尤度

# 非定常スペクトルから時変係数モデルへ

AR モデル ⇒ 自己共分散関数 ⇔ スペクトル

↕ 時変係数　　↕ 非定常

**時変係数 AR モデル**

$$y_n = \sum_{j=1}^{m} a_{jn} y_{n-j} + w_n, \qquad w_n \sim N(0, \sigma^2)$$

**時変(瞬間)スペクトル**

$$p_n(f) = \frac{\sigma_n^2}{\left|1 - \sum_{j=1}^{m} a_{jn} e^{-2\pi i j f}\right|^2}$$



# 時変係数ARモデル

$$y_n = \sum_{j=1}^{m} a_{jn} y_{n-j} + w_n, \qquad a_{jn} \text{ は時間とともに変動}$$

Model for Time-changes of Coefficients

$$\nabla^k a_{jn} = v_{jn}, \qquad v_{jn} \sim N(0, \tau^2)$$

State Space Representation

$$F = F^{(k)} \otimes I_m, \qquad G = G^{(k)} \otimes I_m$$

$$H = H^{(k)} \otimes (y_{n-1}, \cdots, y_{n-m})$$

$$x_n = (a_{1n}, \cdots, a_{mn}, \cdots, a_{1,n-k+1}, \cdots, a_{m,n-k+1})^T$$

$$F^{(1)} = G^{(1)} = H^{(1)} = 1$$

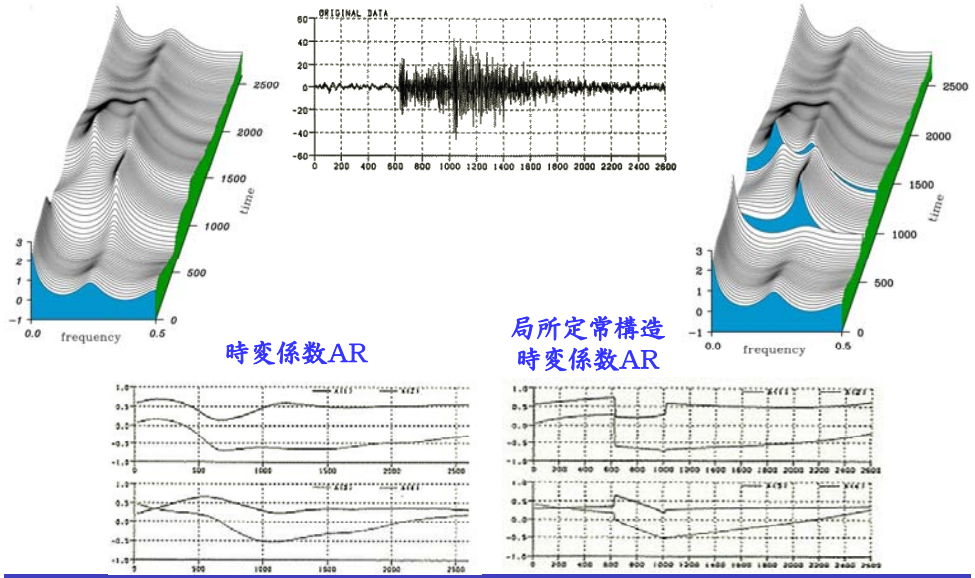
$$F^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad G^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\otimes$ Kronecker product

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\ell} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m\ell} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1\ell}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{m\ell}B \end{bmatrix}$$



# 時変係数と時変スペクトル




時変係数AR

局所定常構造
時変係数AR



# ボラティリティの推定

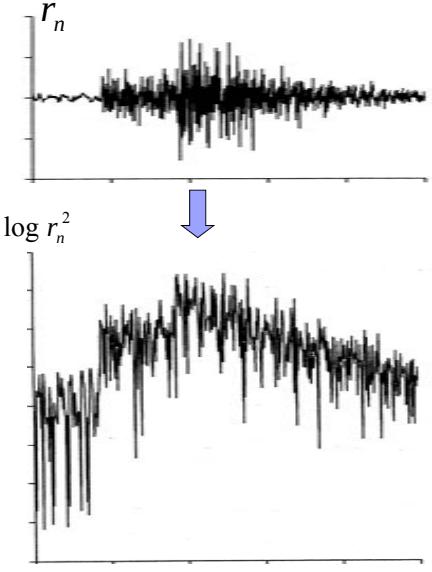
$$r_n = \sigma_n w_n, \qquad w_n \sim N(0,1)$$

$$r_n^2 = \sigma_n^2 w_n^2$$

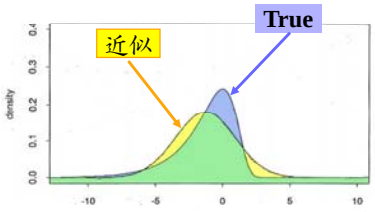
$$\log r_n^2 = \log \sigma_n^2 + \log w_n^2$$

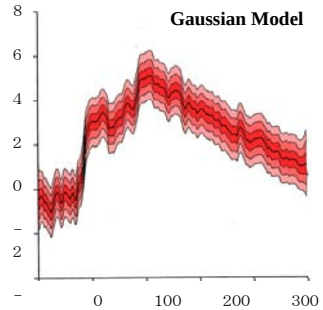
$$\log \sigma_n^2 = \alpha + \beta \log \sigma_{n-1}^2 + \varepsilon_n$$

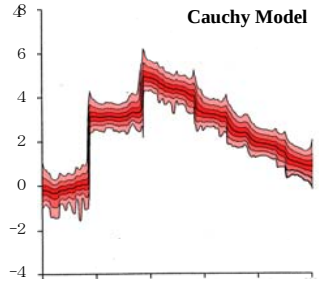
$$\log w_n^2 \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{w}{2} - \frac{e^w}{2}\right\}$$



# 時変分散（ボラティリティ）の推定



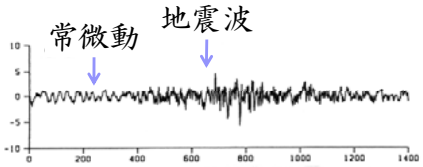




| Model | $\tau^2$ | AIC |
|---|---|---|
| Gauss | 0.04318 | 1861.6 |
| D-Exp | 0.00011 | 1718.2 |



# 低S/Nデータからの信号抽出




観測モデル

$$y_n = r_n + s_n + w_n$$

$r_n$ 常微動
$s_n$ 地震波
$w_n$ 観測ノイズ

成分モデル

$$r_n = \sum_{j=1}^{m} a_j r_{n-j} + u_n$$

$$s_n = \sum_{j=1}^{\ell} b_j s_{n-j} + v_n$$

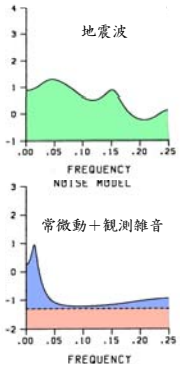
$$u_n \sim N(0, \tau_1^2)$$

$$v_n \sim N(0, \tau_2^2)$$

$$w_n \sim N(0, \sigma^2)$$

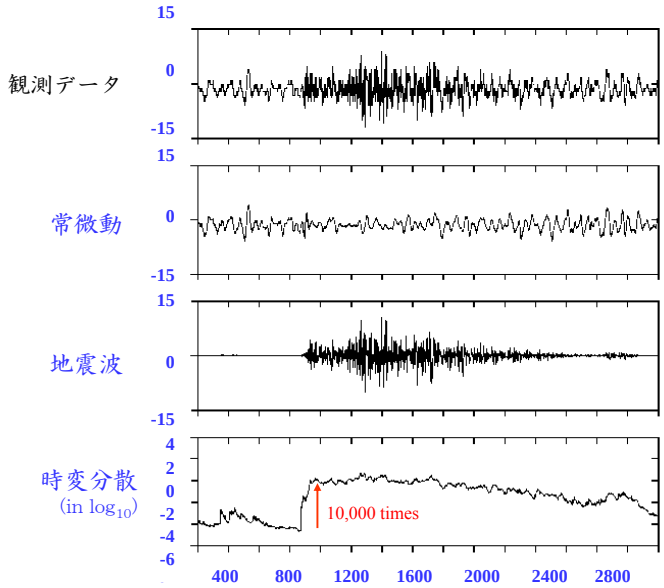
$$x_n = F x_{n-1} + G w_n$$

$$y_n = H x_n + \varepsilon_n$$






# 微小地震波の抽出

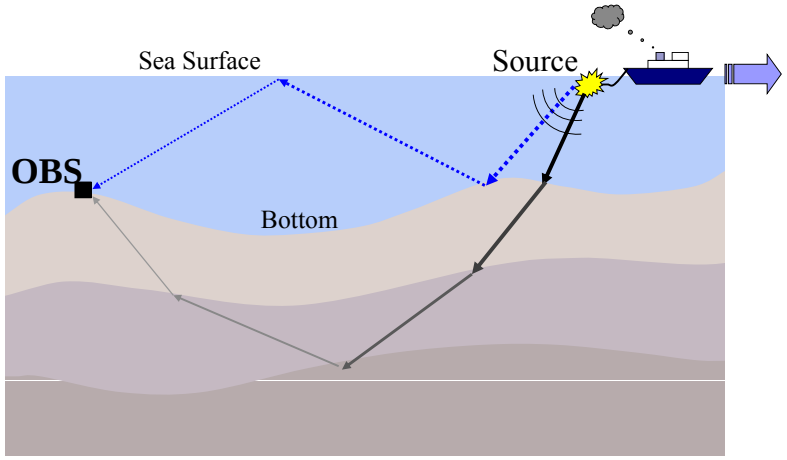



実用化には自己組織型状態空間モデルを利用

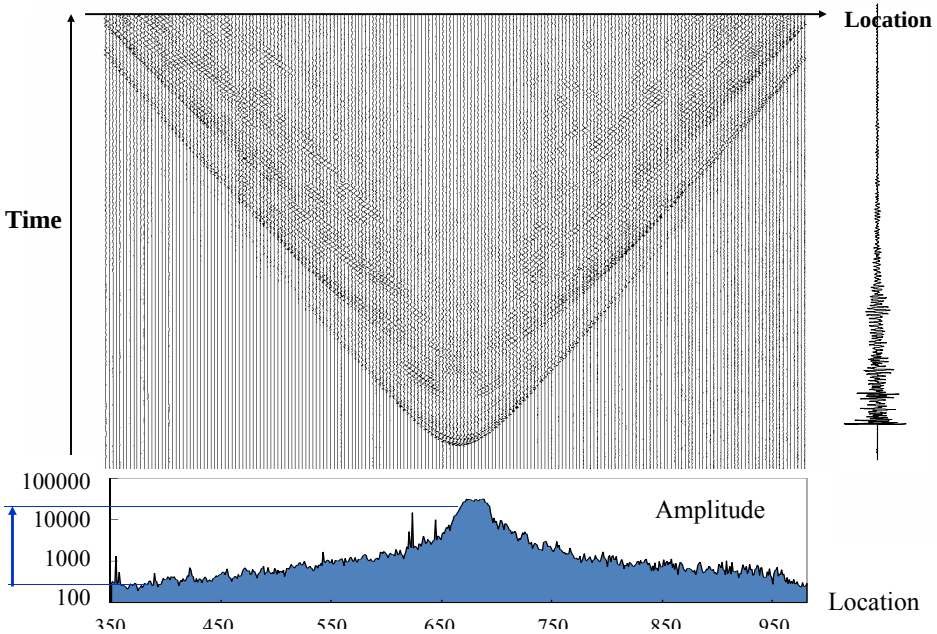


# OBS（海底地震計）Data

— 地下構造の探索 —



# 観測時系列（調整済，982ch）




# 時空間モデルによる分解

**Basic observation model**

$$y_{n,j} = r_{n,j} + s_{n,j} + w_{n,j}$$

$r_{n,j}$ Direct wave

$s_{n,j}$ Reflection wave

**Time series model**

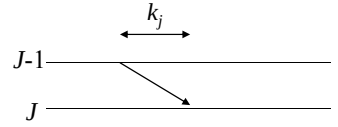
$$r_n = a_1 r_{n-1} + \cdots + a_\ell r_{n-\ell} + v_{n,r}$$

$$s_n = b_1 s_{n-1} + \cdots + b_m s_{n-m} + v_{n,s}$$

**Spatial model**

$$r_{n,j} = r_{n-k_j,j-1} + u^r_{n,j}$$

$$s_{n,j} = s_{n-h_j,j-1} + u^s_{n,j}$$




$k_j = \Delta T_j(\mathrm{W0}), \quad h_j = \Delta T_j(\mathrm{Wx})$

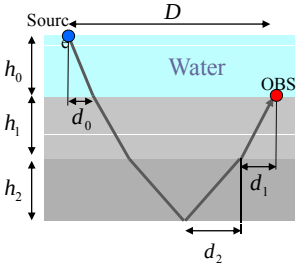
$T_j(\mathrm{W0})$: Arrival time of W0

$T_j(\mathrm{Wx})$: Arrival time of Wx



# 経路モデルと到着時刻

Parallel Layer Structure




Width $h_0, h_1, h_2, h_3 \cdots$ km

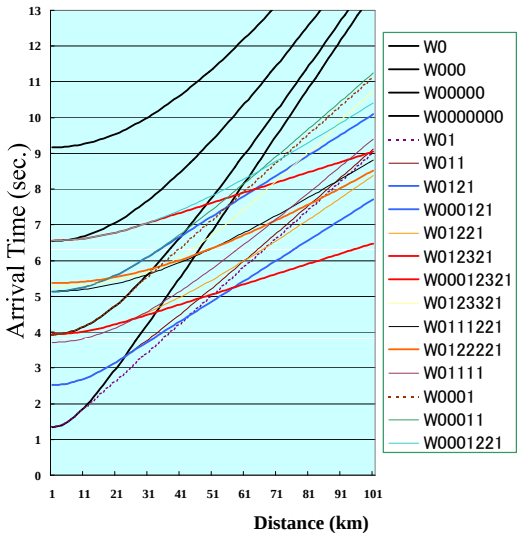
Velocity $v_0, v_1, v_2, v_3 \cdots$ km/sec

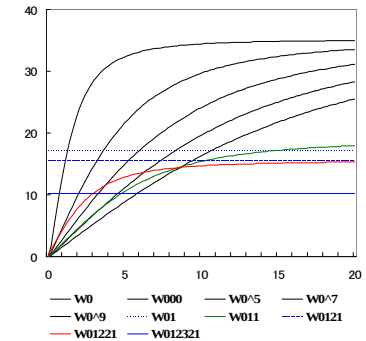
| 経路モデル | 到着時刻 |
|---|---|
| Wave(0) | $v_0^{-1}\sqrt{h_0^2 + D^2}$ |
| Wave(000) | $v_0^{-1}\sqrt{9h_0^2 + D^2}$ |
| Wave(00000) | $v_0^{-1}\sqrt{25h_0^2 + D^2}$ |
| Wave(01) | $v_0^{-1}\sqrt{h_0^2 + d_{01}^2} + v_1^{-1}(D - d_{01})$ |
| Wave(0001) | $3v_0^{-1}\sqrt{h_0^2 + d_{01}^2} + v_1^{-1}(D - 3d_{01})$ |
| Wave(0121) | $v_0^{-1}\sqrt{h_0^2 + d_{02}^2} + 2v_1^{-1}\sqrt{h_1^2 + d_{12}^2} + v_2^{-1}(D - d_{02} - 2d_{12})$ |
| Wave(00012l) | $3v_0^{-1}\sqrt{h_0^2 + d_{02}^2} + 2v_1^{-1}\sqrt{h_1^2 + d_{12}^2} + v_2^{-1}(D - 3d_{02} - 2d_{12})$ |
| Wave(012321) | $v_0^{-1}\sqrt{h_0^2 + d_{03}^2} + 2v_1^{-1}\sqrt{h_1^2 + d_{13}^2} + 2v_2^{-1}\sqrt{h_2^2 + d_{23}^2} + v_3^{-1}d_3$ |

$$d_{ij} = v_i h_i / \sqrt{v_j^2 - v_i^2}, \quad d_3 = D - d_{03} - 2d_{13} - 2d_{23}$$



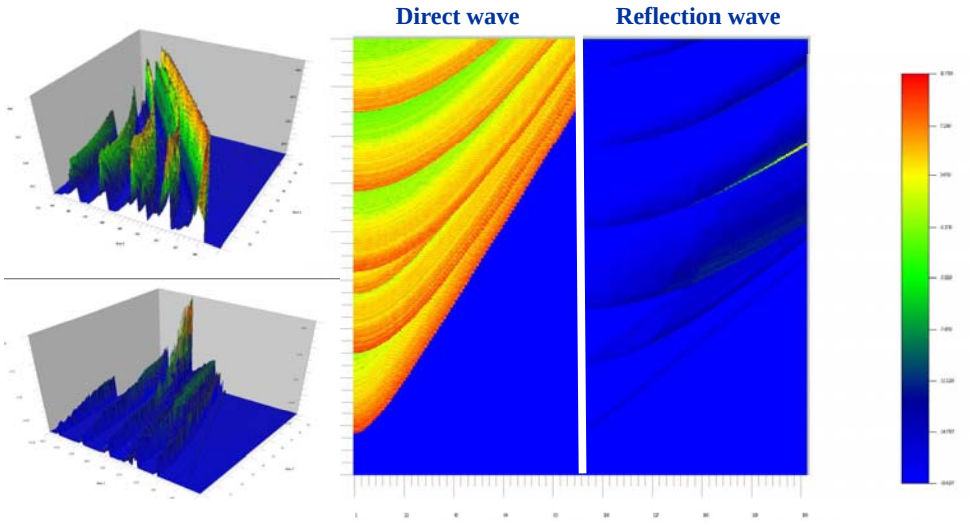
# 経路モデルと到着時刻（OBS4）




| | Epicentral Distance (*km*) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Path Model | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 |
| Wave0 | 1.7 | 32.3 | 34.4 | 34.8 | 35.0 |
| Wave000 | 0.6 | 21.6 | 29.7 | 32.4 | 33.5 |
| Wave00000 | 0.3 | 14.9 | 24.1 | 28.8 | 31.1 |
| Wave011 | — | 10.5 | 15.4 | 17.2 | 17.9 |
| Wave01221 | — | 12.9 | 14.7 | 15.1 | 15.3 |
| Wave012321 | — | — | 10.2 | 10.2 | 10.2 |

# 時空間構造モデルによる分解






# まとめ：社会の変化と学術の変化

社会の変化
- 情報化・情報社会
- 産業のサービス化
- ものづくりからサービス(コト)へ
- 大規模データの出現

学術・科学技術の変化
- 実体のモデルから機能のモデリング
- 第４の科学（データ中心科学)
- 認識科学から設計科学へ